Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

440524

Die Familien Berger, Frärich, Köhler, Mikuscheit, Richter und Schulte wohnen in einer Sackgasse in einer Vorortssiedlung nebeneinander. Über die gegenseitige Lage ihrer Häuser ist folgendes bekannt:

(1) Wenn Herr Frärich von der Arbeit kommt, muss er am Haus der Köhlers vorbei und klingelt dort, um seine Kinder abzuholen. Dann fährt er weiter in seine Garage, die zwischen seinem Haus und dem der Richters steht.

(2) Frau Schulte hat es zu Frau Köhler und zu Frau Richter gleich weit.

(3) Mikuscheits und Richters wohnen am weitesten auseinander.

Die Häuser tragen die Nummern 1 bis 6, und das Haus mit der Nummer 1 liegt am Anfang der Sackgasse.

Welche Familie hat welche Hausnummer?

Weise nach, dass sich aus den Bedingungen (1), (2) und (3) die Zuordnung zwischen den Familien und den Hausnummern eindeutig ableiten lässt!

440521

a) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 167. Die letzte Ziffer des größeren der beiden Summanden ist eine 2. Streicht man diese Ziffer 2, so erhält man den kleineren der beiden Summanden.
Um welche beiden Summanden handelt es sich? Mache eine Probe!

b) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 525. Die letzte Ziffer des größeren der beiden Summanden ist eine 8. Streicht man diese Ziffer 8, so erhält man den kleineren der beiden Summanden.
Um welche beiden Summanden handelt es sich? Mache eine Probe!

440522

Anne legt ein Rechteck aus 2×3 gleich großen Quadraten (siehe Abbildung A 440522 a). Dieses Rechteck nennen wir wieder das Rechteck der „nullten“ Stufe – wie in der Aufgabe 440514. Um dieses Rechteck legt sie eine Reihe Quadrate (siehe Abbildung A 440522 b) und erhält das Rechteck der ersten Stufe. Nun legt sie wieder eine Reihe Quadrate (das Rechteck der zweiten Stufe entsteht), usw.

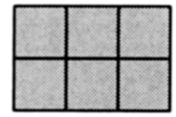


Abbildung A 440522 a

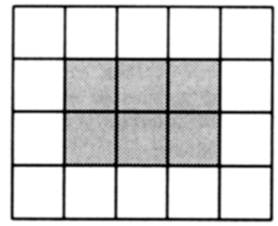


Abbildung A 440522 b

a) Aus wie vielen Quadraten besteht das Rechteck der dritte Stufe?

b) Aus wie vielen Quadraten besteht das Rechteck der 20. Stufe? Ermittle das Ergebnis durch eine Rechnung!

c) Anne stellt fest, dass es unter diesen Rechtecken eines gibt, das genau fünfmal so viele Quadrate enthält wie ein anderes. Für welche Rechtecke gilt dies?

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

440524

Die Familien Berger, Frärich, Köhler, Mikuscheit, Richter und Schulte wohnen in einer Sackgasse in einer Vorortssiedlung nebeneinander. Über die gegenseitige Lage ihrer Häuser ist folgendes bekannt:

(1) Wenn Herr Frärich von der Arbeit kommt, muss er am Haus der Köhlers vorbei und klingelt dort, um seine Kinder abzuholen. Dann fährt er weiter in seine Garage, die zwischen seinem Haus und dem der Richters steht.

(2) Frau Schulte hat es zu Frau Köhler und zu Frau Richter gleich weit.

(3) Mikuscheits und Richters wohnen am weitesten auseinander.

Die Häuser tragen die Nummern 1 bis 6, und das Haus mit der Nummer 1 liegt am Anfang der Sackgasse.

Welche Familie hat welche Hausnummer?

Weise nach, dass sich aus den Bedingungen (1), (2) und (3) die Zuordnung zwischen den Familien und den Hausnummern eindeutig ableiten lässt!

440621

Wenzel liest in einem vielbändigen Lexikon, das insgesamt 15 607 fortlaufend nummerierte Seiten hat, den Artikel über den Abakus (eine alte Rechenhilfe). Dieser Artikel steht auf drei Seiten.

Wenzel bemerkt: Wenn man zum Produkt der drei Seitenzahlen des Artikels eine 7 addiert, so ergibt sich gerade die Anzahl der Seiten des Lexikons.

Auf welchen Seiten steht der Artikel über den Abakus?

440623

a) Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche in Abbildung A 440623 a?

b) Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche in Abbildung A 440623 b?

Berechne den Flächeninhalt in Einheitsquadraten; die Einteilung der Zeichnungen zeigt diese Einheitsquadrate (EQ)

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

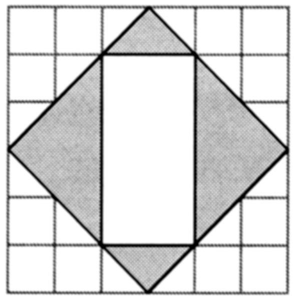


Abbildung A 440623 a

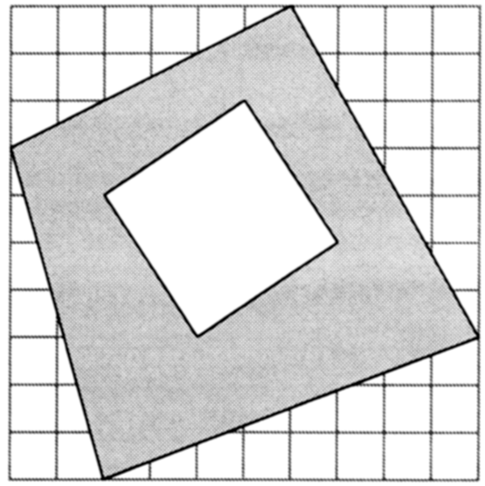


Abbildung A 440623 b

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

440623

a) Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche in Abbildung A 440623 a?

b) Welchen Flächeninhalt hat die graue Fläche in Abbildung A 440623 b?

Berechne den Flächeninhalt in Einheitsquadraten; die Einteilung der Zeichnungen zeigt diese Einheitsquadrate (EQ)

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

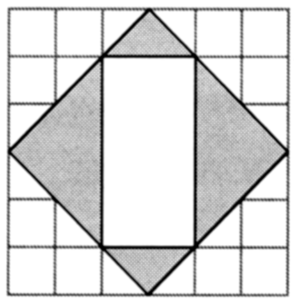


Abbildung A 440623 a

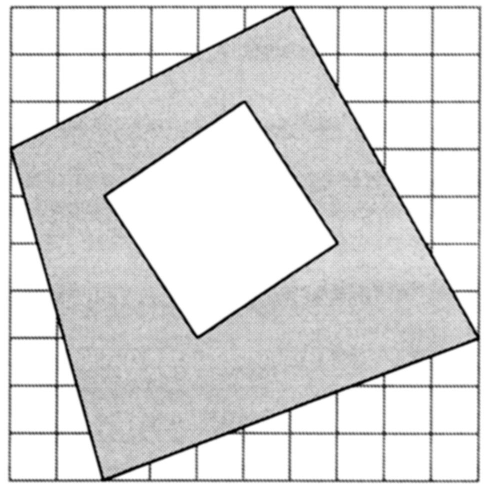


Abbildung A 440623 b

440722

Zwischen zwei Orten A und B verkehren zwei Triebwagenzüge der Deutschen Bahn AG. Sie halten auf den Fahrten von A nach B und von B nach A genau einmal im Ort C jeweils 10 Minuten.

Beide Triebwagen fahren genau um 12.00 Uhr in A bzw. B ab, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Sie erreichen die Endstation B bzw. A zum gleichen Zeitpunkt und zwar genau um 13.31 Uhr. Die Entfernung der Orte A und C beträgt vier Fünftel der Entfernung der Orte B und C.

Untersuche, ob sich die Triebwagen im Ort C treffen, wenn vorausgesetzt wird, dass sie mit konstanter Geschwindigkeit fahren!

440724

Vor einem Spiel werden an neun Freunde Spielmarken verteilt. In der ersten Runde des Spiels bekommt A ein Neuntel der Spielmarken, B ein Achtel vom Rest, C ein Siebtel von dem, was jetzt noch übrig ist, D ein Sechstel vom verbleibenden Rest, E ein Fünftel vom verbleibenden Rest, F ein Viertel vom verbleibenden Rest, G ein Drittel vom verbleibenden Rest, H die Hälfte von dem, was jetzt noch übrig ist. K erhält schließlich den letzten Rest.

In der zweiten Runde des Spiels wird dieselbe Anzahl Spielmarken verteilt: A bekommt wieder ein Neuntel, B bekommt ein Siebtel von dem verbleibenden Rest, C erhält ein Viertel vom verbleibenden Rest, D bekommt ein Viertel vom verbleibenden Rest, E erhält ein Drittel von dem, was jetzt noch übrig ist. Die restlichen Spielmarken werden auf F, G, H und K gleichmäßig verteilt.

B bekommt in der zweiten Runde zwei Spielmarken mehr als in der ersten Runde.

a) Berechne aus den gegebenen Bedingungen die Anzahl der Spielmarken sowie deren Verteilung auf die neun Spieler in der ersten Runde des Spiels!

b) Berechne die Verteilung der Spielmarken auf die neun Spieler in der zweiten Runde des Spiels!

c) In einer dritten Runde soll B drei Spielmarken mehr bekommen als A und jeder der weiteren Spieler (in der genannten Reihenfolge) drei Spielmarken mehr als sein Vorgänger erhalten.
Lässt sich die berechnete Anzahl von Spielmarken auch auf diese Weise verteilen?

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8 & 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

440823

Über ein Fünfeck $ABCDE$ wird vorausgesetzt:

(1) Alle Seiten des Fünfecks sind gleich lang.

(2) Alle Winkel des Fünfecks sind gleich groß.

(3) Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$ schneiden einander im Punkt F.

a) Berechne die Größe der Innenwinkel eines solchen Fünfecks!

b) Beweise, dass aus den Voraussetzungen folgt, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{FC}$ gleich lang sind!

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

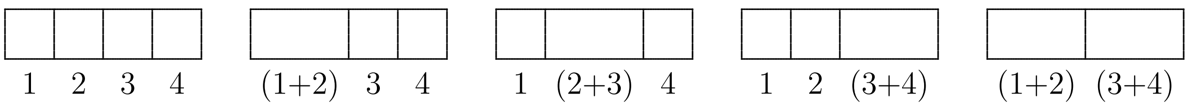
440921

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit dem harmonischen Mittel $h = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4$ und dem geometrischen Mittel $g = \sqrt{x\,y} = 6$.

Bestimmen Sie den Wert des arithmetischen Mittels $a = \dfrac{x+y}{2}$.

440824

Folgende Abbildung zeigt die fünf Möglichkeiten, ein Rechteck mit der Breite 1 und der Länge 4 (also mit dem Inhalt 4) in Quadrate mit dem Inhalt 1 oder Rechtecke mit dem Inhalt 2 aufzuteilen:



Wir halten dies durch $f(4) = 5$ fest.

a) Ermittle die Anzahl $f(5)$ aller Möglichkeiten, ein derartiges Rechteck mit dem Inhalt 5 in Quadrate mit dem Inhalt 1 oder Rechtecke mit dem Inhalt 2 zu zerlegen!

b) Ermittle $f(6)$ und $f(10)$!

44. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

440921

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit dem harmonischen Mittel $h = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4$ und dem geometrischen Mittel $g = \sqrt{x\,y} = 6$.

Bestimmen Sie den Wert des arithmetischen Mittels $a = \dfrac{x+y}{2}$.

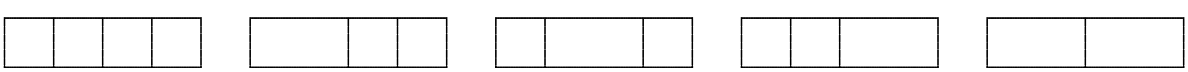
440922

Laura und Markus spielen folgendes Spiel: Laura schreibt mindestens drei natürliche Zahlen hintereinander auf eine Tafel. Die erste und die letzte Zahl sind jeweils Null und alle anderen sind positiv. Die Summe aller auf die Tafel geschriebenen Zahlen wird mit S bezeichnet. Markus streicht nun eine an der Tafel stehende positive Zahl z durch; die Summe der links von z stehenden Zahlen sei L, die Summe der rechts von z stehenden Zahlen sei R. Markus hat gewonnen, wenn L und R beide nicht größer als $\frac{1}{2}S$ sind; sonst hat Laura gewonnen.

a) Zeigen Sie, dass Markus immer gewinnen kann.
b) Die Spielregeln werden dahingehend abgeändert, dass Markus genau dann gewonnen hat, wenn L und R beide kleiner als $\frac{1}{2}S$ sind. Kann Markus in diesem Fall immer gewinnen?

440824

Folgende Abbildung zeigt die fünf Möglichkeiten, ein Rechteck mit der Breite 1 und der Länge 4 (also mit dem Inhalt 4) in Quadrate mit dem Inhalt 1 oder Rechtecke mit dem Inhalt 2 aufzuteilen:



1 2 3 4 (1+2) 3 4 1 (2+3) 4 1 2 (3+4) (1+2) (3+4)

Wir halten dies durch $f(4) = 5$ fest.

a) Ermittle die Anzahl $f(5)$ aller Möglichkeiten, ein derartiges Rechteck mit dem Inhalt 5 in Quadrate mit dem Inhalt 1 oder Rechtecke mit dem Inhalt 2 zu zerlegen!
b) Ermittle $f(6)$ und $f(10)$!

AAA

ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. D ist der Fußpunkt des Lotes von C auf die Seite $\overline{AB}$. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$.

Beweise: $|\overline{AM}| > |\overline{AC}|$!

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

440921

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit dem harmonischen Mittel $h = \dfrac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 4$ und dem geometrischen Mittel $g = \sqrt{x\,y} = 6$.

Bestimmen Sie den Wert des arithmetischen Mittels $a = \dfrac{x+y}{2}$.

AAA

ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. D ist der Fußpunkt des Lotes von C auf die Seite $\overline{AB}$. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$.

Beweise: $|\overline{AM}| > |\overline{AC}|$!

441024

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt:

Die Summe aus der Zahl n, ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $Q(Q(n))$ beträgt 2004.

440922

Laura und Markus spielen folgendes Spiel: Laura schreibt mindestens drei natürliche Zahlen hintereinander auf eine Tafel. Die erste und die letzte Zahl sind jeweils Null und alle anderen sind positiv. Die Summe aller auf die Tafel geschriebenen Zahlen wird mit S bezeichnet. Markus streicht nun eine an der Tafel stehende positive Zahl z durch; die Summe der links von z stehenden Zahlen sei L, die Summe der rechts von z stehenden Zahlen sei R. Markus hat gewonnen, wenn L und R beide nicht größer als $\frac{1}{2}S$ sind; sonst hat Laura gewonnen.

a) Zeigen Sie, dass Markus immer gewinnen kann.

b) Die Spielregeln werden dahingehend abgeändert, dass Markus genau dann gewonnen hat, wenn L und R beide kleiner als $\frac{1}{2}S$ sind. Kann Markus in diesem Fall immer gewinnen?

Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.

44. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12 & 13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

441321

Eine ganze Zahl n sei in der Form

$$n = (a + b)^2 + a - b$$

mit positiven ganzen Zahlen a und b dargestellt.

a) Man beweise, dass n gerade ist.

b) Man ermittle, wie viele ganze Zahlen n zwischen 1 und $2005 \cdot 2005$ eine solche Darstellung besitzen.

AAA

ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. D ist der Fußpunkt des Lotes von C auf die Seite $\overline{AB}$. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$.

Beweise: $|\overline{AM}| > |\overline{AC}|$!

441323

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{3+x}{6-x} + \frac{2+y}{9-y} = 0,$$

$$\frac{4+x}{9-y} + \frac{1+y}{6-x} = 0$$

sind.

441324

Zwei Freunde Andreas und Ben haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Gegeben sind die n Eckpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eines regelmäßigen n-Ecks mit $n \geq 4$. Andreas und Ben zeichnen abwechselnd jeweils eine neue Strecke A_iA_j $(i \neq j)$, bis alle Kanten und Diagonalen eingezeichnet sind. Dabei benutzt Andreas die Farbe Blau und Ben die Farbe Rot. Andreas hat gewonnen, wenn am Ende des Spiels mindestens ein „einfarbiges Dreieck" entstanden ist. Im anderen Fall hat Ben gewonnen.

Für welche n kann Andreas durch geeignete Spielweise den Gewinn erzwingen,

a) falls Andreas die erste Verbindungsstrecke zeichnet,

b) falls Ben die erste Strecke zeichnet?

Bemerkung: Unter einem „einfarbigen Dreieck“ verstehe man drei Punkte A_i, A_j, A_k mit $i < j < k$ so, dass die drei Strecken A_iA_j, A_jA_k und A_iA_k mit der gleichen Farbe gezeichnet sind.