49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Lösungen

490921 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die Menge der natürlichen Teiler von 50 ist $T_{50} = \{1;\, 2;\, 5;\, 10;\, 25;\, 50\}$. Wegen $20-|r| \leq 20$ gilt $20-|r| \in T_{50}$ genau dann, wenn $|r| \in \{19;\, 18;\, 15;\, 10\}$, also genau dann, wenn $r \in \{-19;\, -18;\, -15;\, -10;\, 10;\, 15;\, 18;\, 19\}$. Also ist $\frac{50}{20-|r|}$ genau für diese r eine natürliche Zahl.

Teil b) Wenn $\frac{a}{75-|s|}$ eine natürliche Zahl ist, dann ist auch $\frac{a}{75-|-s|}$ eine. Die Anzahl der gesuchten Zahlen s kann also nur ungerade sein, wenn $s = 0$ zu ihnen gehört, also wenn 75 ein Teiler von a ist. Da 0 zu viele Teiler hat, ist a mindestens 75. Die natürlichen Teiler von 75 sind 1, 3, 5, 15, 25, 75. Die zugeordneten Zahlen s lauten in der entsprechenden Reihenfolge $74, -74$; $72, -72$; $70, -70$; $60, -60$; $50, -50$ sowie 0. Es sind wie gefordert genau 11 Zahlen.

Die Zahl $a = 75$ ist damit die kleinste natürliche Zahl, für die es genau 11 ganze Zahlen s mit den geforderten Eigenschaften gibt.

Hinweis: Auch $a = 79 \cdot 75 = 5925$ hat 11 Teiler der genannten Art. Sie ist aber nicht die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft.

490923 Lösung *10 Punkte*

Wir betrachten nur Flüssigkeit A. Ein Liter wird nach F_2 mit der Flüssigkeit B geschöpft, dort ist der Anteil dann einer von drei Litern. Von diesen jetzt drei Litern wird ein Liter (mit $\frac{1}{3}$ Liter Flüssigkeit A) zurückgefüllt. Damit beträgt im Fass F_1 der Anteil (der Flüssigkeit A) $3+\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ Liter von insgesamt $4 = \frac{12}{3}$ Litern, das ist ein Anteil von $\frac{5}{6}$ (Ergebnis a).

Somit werden $\frac{5}{6}$ Liter zum noch vorhandenen Anteil von $\frac{2}{3}$ Liter in Fass F_2 gegeben. Das sind $\frac{3}{2}$ Liter von insgesamt 3 Litern, also genau die Hälfte. Damit hat auch Flüssigkeit B im Fass F_2 den gleichen Anteil von $\frac{1}{2}$.

490924 Lösung *10 Punkte*

Lösungsvariante 1 für Teil a) Im Spezialfall des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $a = b$ gilt $|AB| = 2R = \sqrt{2}\,a$ und $h_c = R = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a$, siehe auch Abbildung L 490924 a1.

Die Berührungsradien zu den beiden Katheten erzeugen mit diesen bei C ein Viereck mit zwei benachbarten Seiten der Länge r und drei rechten Winkeln bei den Berührpunkten und bei

C, also ein Quadrat mit der Seitenlänge r. Die Höhe h_c ist die Summe aus r und der Länge der Quadratdiagonalen, also gilt

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,a = r + \sqrt{2}\,r = \left(1 + \sqrt{2}\right) r.$$

Umstellen und Rationalmachen des Nenners ergibt $r = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) a$. Zusammen mit $R = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a$ folgt die Behauptung.

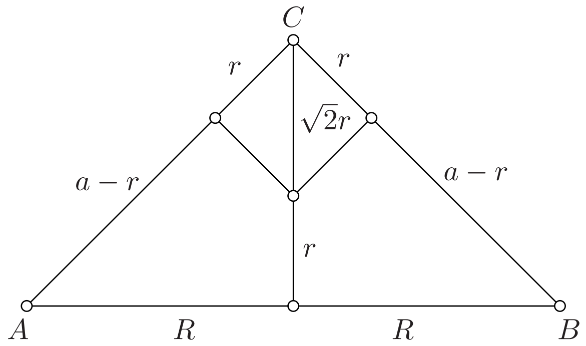

Abbildung L 490924 a1

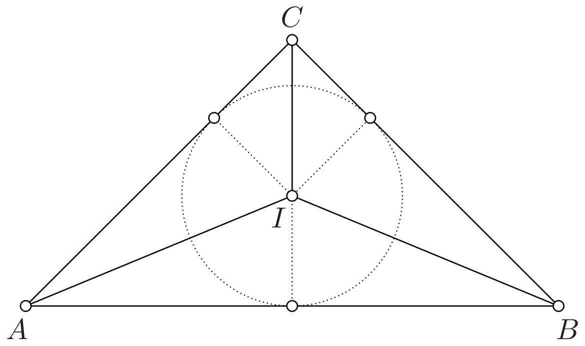

Abbildung L 490924 a2

Lösungsvariante 2 (skizziert) für Teil a) Die Verbindungsstrecken des Inkreismittelpunkts I mit A, B und C zerlegen das Dreieck ABC in drei Teildreiecke, deren Höhe von I jeweils die Länge r hat, siehe auch Abbildung L 490924 a2.

Für deren Inhaltssumme gilt:

$$\frac{1}{2}\left(ar + ar + \sqrt{2}\,ar\right) = \frac{a^2}{2}.$$

Auflösen nach r liefert den gleichen Term wie Variante 1.

Teil b) Die Berührungsradien des Inkreises mit den Katheten zerlegen das Dreieck in drei Vierecke mit den Diagonalen $\overline{CI}$, $\overline{AI}$ bzw. $\overline{BI}$, siehe nebenstehende Abbildung.

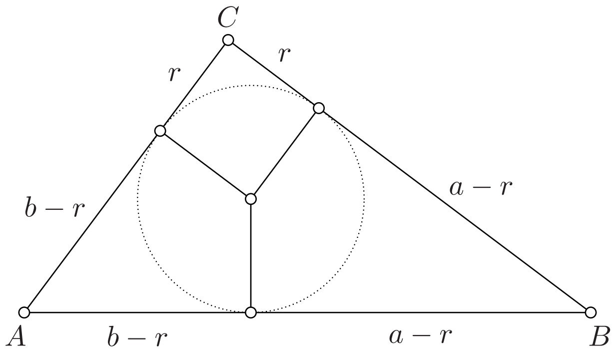

Abbildung L 490924 b

i) Wie in a) zeigt man, dass das Viereck bei C ein Quadrat mit der Seitenlänge r ist.

ii) Das Viereck bei A wird durch $\overline{AI}$ in zwei Dreiecke zerlegt, die in den zwei Seitenlängen $|AI|$ und r und der Größe der rechten Winkel bei den Berührpunkten übereinstimmen. Da die Hypotenuse die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck ist, sind sie nach Ssw kongruent. Daher sind auch die Tangentenabschnitte von A an den Inkreis gleich lang. Wegen i) haben sie die Länge $b - r$.

iii) Entsprechend zeigt man, dass die Tangentenabschnitte von B an den Inkreis die Länge $a - r$ haben.

Aus ii) und iii) folgt $c = (a - r) + (b - r) = a + b - 2r$.

Nach der Umkehrung des Satzes des Thales ist die Strecke $\overline{AB}$ Durchmesser des Umkreises von Dreieck ABC, also $c = 2R$.

Zusammen folgt $2R = a + b - 2r$ und damit $R + r = \frac{a+b}{2}$.

Lösungsvariante für Teil b) Ein der obigen Variante 2 für Teil a) entsprechender Flächenansatz führt auf

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Rationalmachen des Nenners liefert $r = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, was mit $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ auch zu $R + r = \frac{a+b}{2}$ führt.

Bemerkungen:

1) Wird zunächst b) gelöst, ergibt sich a) unmittelbar als Spezialfall mit $a = b$.

2) Die Kongruenz der Tangentenabschnitte kann in b) auch als bekannte Tatsache benutzt werden.