49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Lösungen

490722 Lösung *10 Punkte*

Nach Aufgabenstellung gilt:

(1) 2 Liter Bowle enthalten 800 ml Wein.
(2) 125 ml Bowle werden entnommen.
(3) 60 ml Fruchtsaft werden aufgefüllt.
(4) Es wird so viel Wasser aufgefüllt, dass wieder 2 Liter Bowle entstehen.

Teil a) Aus Bedingung (1) folgt, dass die Bowle $(2000 - 800 =)$ 1200 ml Fruchtsaft enthält, also 40 % Wein und 60 % Fruchtsaft. Aus der Bedingung (2) folgt, dass nach der Entnahme $(2000 - 125 =)$ 1875 ml Bowle vorhanden sind, die (40 % von 1875 =) 750 ml Wein und (60 % von 1875 =) 1125 ml Fruchtsaft enthält. Aus (2), (3) und (4) folgt, dass 60 ml Fruchtsaft und $(125 - 60 =)$ 65 ml Wasser aufgefüllt werden, so dass nach dem Auffüllen wieder 2000 ml Bowle vorhanden sind, die aus 750 ml Wein, $(1125+60 =)$ 1185 ml Fruchtsaft und 65 ml Wasser bestehen.

Teil b) Wegen $750 : 2000 = 0{,}375$ und $1185 : 2000 = 0{,}5925$ enthält die Bowle nach dem Auffüllen 37,5 % Wein und 59,25 % Fruchtsaft.

Hinweis: Beim Lösen kann folgende Tabelle nützlich sein. Sie ermöglicht auch eine Rechenprobe, kann jedoch eine Herleitung durch Folgerungen aus den gegebenen Bedingungen nicht ersetzen.

	vor Entnahme		nach Entnahme	nach Auffüllen	
	Volumen	Anteil	Volumen in ml	Volumen in ml	Anteil in %
Wein	800 ml	40 %	750	750	37,50
Fruchtsaft	1200 ml	60 %	1125	(1125 + 60 =) 1185	59,25
Wasser	0 ml	0 %	0	65	3,25
Bowle	2000 ml	100 %	(2000 − 125 =) 1875	2000	100,00

Eine eigentliche Probe im Sinne eines Existenznachweises ist nicht erforderlich, da es der Aufgabe zu entnehmen ist, dass eine Lösung existiert und sich aus der Rechnung genau eine Lösung ergibt.

490723 Lösung *10 Punkte*

Eine Planfigur des Dreiecks befindet sich in Abbildung L 490723.

Es bezeichne α die Größe des Winkels BAC, β die Größe des Winkels CBA, γ die Größe des Winkels ACB und φ die Größe des Winkels BAF.

Da F auf der Geraden BC zwischen B und C liegt, folgt zusammen mit Voraussetzung (3)

$$\alpha = |\sphericalangle BAF| + |\sphericalangle FAC| = \varphi + \varphi + 30°$$

und daher

$$\alpha = 2\varphi + 30°. \tag{4}$$

Aus Voraussetzung (1) folgt, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, also folgt mit dem Basiswinkelsatz und Gleichung (4)

$$\beta = \alpha = 2\varphi + 30°. \tag{5}$$

Aus dem Innenwinkelsatz im Dreieck ABF und Voraussetzung (2) folgt

$$180° = \varphi + \beta + 90° = 3\varphi + 120°,$$

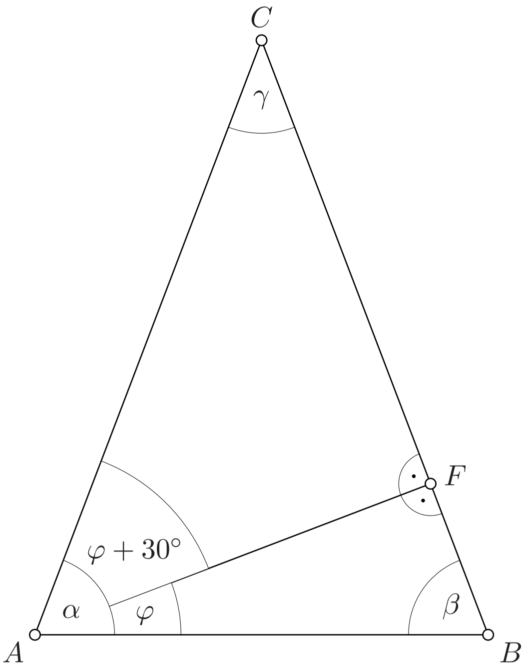

Abbildung L 490723

also $\varphi = 20°$.

Gleichung (5) liefert $\alpha = \beta = 70°$ und aus dem Innenwinkelsatz im Dreieck ABC ergibt sich $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 70° - 70° = 40°$.

490824 Lösung *10 Punkte*

Teil a) I. Es sei z eine Zahl, die der Bedingung genügt. Dann existieren zwei Zahlen $a, b \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ mit $a \neq 0$ und

$$z = 10a + b. \tag{1}$$

Weiter gilt für die Quersumme

$$\mathrm{QS}(z) = a + b \tag{2}$$

und

$$6 \cdot (z + \mathrm{QS}(z)) = 180. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $10a + b + a + b = 30$, d. h.

$$11a + 2b = 30. \tag{4}$$

Da $2b$ und 30 gerade sind und 11 ungerade ist, muss a gerade sein. Da b nicht negativ ist, muss a kleiner als $\frac{30}{11}$ sein. Damit verbleibt nur $a = 2$. Aus (4) folgt $b = 4$ und damit $z = 24$.

II. Die Zahl 24 ist zweistellig mit der Quersumme 6. Die Summe aus Zahl und Quersumme ist 30, das Sechsfache ist tatsächlich 180.

Wegen I. und II. ist 24 die einzige Zahl, welche der Bedingung genügt.

Teil b) I. Angenommen, zu einem Paar positiver ganzer Zahlen $(m; n)$ existiert eine Zahl z mit den geforderten Eigenschaften. Dann existieren drei Zahlen $a, b, c \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ mit $a \neq 0$ und

$$z = 100a + 10b + c, \tag{1}$$
$$n = \mathrm{QS}(z) = a + b + c, \tag{2}$$
$$c = 2a, \tag{3}$$
$$100c + 10b + a = 100a + 10b + c + m. \tag{4}$$

Aus (3) folgt

$$a \in \{1; 2; 3; 4\}. \tag{5}$$

Die Gleichung (4) ergibt $99(c - a) = m$. Wegen Gleichung (3) erhalten wir

$$m = 99a. \tag{6}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$n = 3a + b.$$

Folglich gilt

$$(m; n) \in M := \{(99a; 3a + b) : a \in \{1; 2; 3; 4\}, b \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}\}.$$

II. Ist nun $(m; n) \in M$, dann gilt $m = 99a$ und $n = 3a + b$ mit einem Paar $(a; b)$ mit $a \in \{1; 2; 3; 4\}$ und $b \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$. Die Zahl

$$z = 100a + 10b + 2a$$

ist wegen $a \neq 0$ dreistellig. Wegen $a < 5$ ist $2a$ die Einerstelle von z, welche somit doppelt so groß wie die Hunderterstelle a ist. Wegen $a < 5$ und $b < 10$ gilt

$$\mathrm{QS}(z) = a + b + 2a = 3a + b = n.$$

Die aus Vertauschung der Einer- mit der Hunderterstelle entstehende Zahl ist

$$200a + 10b + a,$$

welche um $99a = m$ größer ist als z. Somit existiert zu jedem Paar $(m; n) \in M$ eine Zahl z, die den Forderungen genügt.

Wegen I. und II. ist M die Menge der gesuchten Paare $(m; n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} M = \{&(99; 3); (99; 4); \ldots; (99; 12); (198; 6); (198; 7); \ldots; (198; 15);\\ &(297; 9); (297; 10); \ldots; (297; 18); (396; 12); (396; 13); \ldots; (396; 21)\}. \end{aligned}$$

Dies sind 40 Paare.