49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 7
Lösungen

490721 Lösung *10 Punkte*

Angenommen, es gibt eine Lösung der Aufgabe. Dann muss das erste Sternchen durch 1 ersetzt werden; denn andernfalls entstünde, da es auch keine 0 sein kann, als Produkt eine vierstellige Zahl. Ferner ist das zweite Sternchen durch 0 oder 1 zu ersetzen; denn sonst entstünde ebenfalls eine vierstellige Zahl, da bereits $(12 \cdot 90 =)$ 1080 vierstellig ist.

Wird für das zweite Sternchen 0 eingesetzt, dann kann für das dritte Sternchen jede der Ziffern 0 bis 9 eingesetzt werden. Wird dagegen für das zweite Sternchen 1 eingesetzt, so muss das dritte Sternchen durch 0 ersetzt werden; denn sonst entstünde ein Produkt, das mindestens gleich $(11 \cdot 91 =)$ 1001, also vierstellig ist.

Die somit verbliebenen Möglichkeiten für die ersten drei Sternchen führen in der Tat zu je genau einer Lösung, nämlich zu

$$\begin{array}{llll} 10 \cdot 90 = 900, & 10 \cdot 91 = 910, & 10 \cdot 92 = 920, & 10 \cdot 93 = 930, \\ 10 \cdot 94 = 940, & 10 \cdot 95 = 950, & 10 \cdot 96 = 960, & 10 \cdot 97 = 970, \\ 10 \cdot 98 = 980, & 10 \cdot 99 = 990, & 11 \cdot 90 = 990. & \end{array}$$

490722 Lösung *10 Punkte*

Nach Aufgabenstellung gilt:

(1) 2 Liter Bowle enthalten 800 ml Wein.
(2) 125 ml Bowle werden entnommen.
(3) 60 ml Fruchtsaft werden aufgefüllt.
(4) Es wird so viel Wasser aufgefüllt, dass wieder 2 Liter Bowle entstehen.

Teil a) Aus Bedingung (1) folgt, dass die Bowle $(2000 - 800 =)$ 1200 ml Fruchtsaft enthält, also 40 % Wein und 60 % Fruchtsaft. Aus der Bedingung (2) folgt, dass nach der Entnahme $(2000 - 125 =)$ 1875 ml Bowle vorhanden sind, die (40 % von 1875 =) 750 ml Wein und (60 % von 1875 =) 1125 ml Fruchtsaft enthält. Aus (2), (3) und (4) folgt, dass 60 ml Fruchtsaft und $(125 - 60 =)$ 65 ml Wasser aufgefüllt werden, so dass nach dem Auffüllen wieder 2000 ml Bowle vorhanden sind, die aus 750 ml Wein, $(1125+60 =)$ 1185 ml Fruchtsaft und 65 ml Wasser bestehen.

Teil b) Wegen $750 : 2000 = 0{,}375$ und $1185 : 2000 = 0{,}5925$ enthält die Bowle nach dem Auffüllen 37,5 % Wein und 59,25 % Fruchtsaft.

Hinweis: Beim Lösen kann folgende Tabelle nützlich sein. Sie ermöglicht auch eine Rechenprobe, kann jedoch eine Herleitung durch Folgerungen aus den gegebenen Bedingungen nicht ersetzen.

	vor Entnahme		nach Entnahme	nach Auffüllen	
	Volumen	Anteil	Volumen in ml	Volumen in ml	Anteil in %
Wein	800 ml	40 %	750	750	37,50
Fruchtsaft	1200 ml	60 %	1125	$(1125 + 60 =)$ 1185	59,25
Wasser	0 ml	0 %	0	65	3,25
Bowle	2000 ml	100 %	$(2000 - 125 =)$ 1875	2000	100,00

Eine eigentliche Probe im Sinne eines Existenznachweises ist nicht erforderlich, da es der Aufgabe zu entnehmen ist, dass eine Lösung existiert und sich aus der Rechnung genau eine Lösung ergibt.

<u>490723 Lösung</u> *10 Punkte*

Eine Planfigur des Dreiecks befindet sich in Abbildung L 490723.

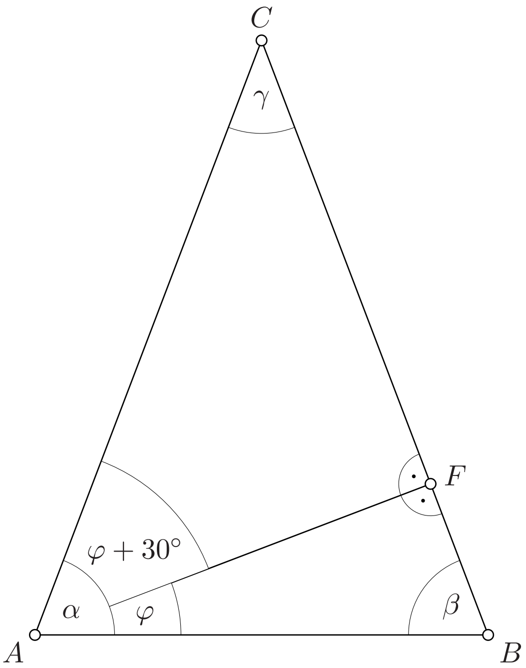

Abbildung L 490723

Es bezeichne α die Größe des Winkels BAC, β die Größe des Winkels CBA, γ die Größe des Winkels ACB und φ die Größe des Winkels BAF.

Da F auf der Geraden BC zwischen B und C liegt, folgt zusammen mit Voraussetzung (3)

$$\alpha = |\sphericalangle BAF| + |\sphericalangle FAC| = \varphi + \varphi + 30^\circ$$

und daher

$$\alpha = 2\varphi + 30^\circ. \tag{4}$$

Aus Voraussetzung (1) folgt, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, also folgt mit dem Basiswinkelsatz und Gleichung (4)

$$\beta = \alpha = 2\varphi + 30^\circ. \tag{5}$$

Aus dem Innenwinkelsatz im Dreieck ABF und Voraussetzung (2) folgt

$$180^\circ = \varphi + \beta + 90^\circ = 3\varphi + 120^\circ,$$

also $\varphi = 20^\circ$.

Gleichung (5) liefert $\alpha = \beta = 70^\circ$ und aus dem Innenwinkelsatz im Dreieck ABC ergibt sich $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$.