49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

© 2009 *Aufgabenausschuss des Mathematik-Olympiaden e.V.*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

490621 Lösung *12 Punkte*

Teil a) Da die Zahlen durch 4 teilbar sein sollen, muss die 2 auf jeden Fall an der Einerstelle der Zahlen stehen.

Es können die zweistelligen Zahlen 32, 52 und 72 gebildet werden. Alle drei Zahlen sind durch 4 teilbar, daran ändert sich durch das Voranstellen von weiteren Ziffern nichts.

Es können die dreistelligen Zahlen 532, 732, 352, 752, 372 und 572 gebildet werden, indem man vor die zweistelligen Zahlen jeweils eine der beiden anderen fehlenden Ziffern schreibt.

Es können die vierstelligen Zahlen 7532, 5732, 7352, 3752, 5372 und 3572 aus den dreistelligen Zahlen gebildet werden, indem man die jeweils fehlende Ziffer an die Tausenderstelle setzt.

Zusammenfassend noch einmal alle Lösungszahlen:

$$32, 52, 72, 352, 372, 532, 572, 732, 752, 3572, 3752, 5372, 5732, 7352, 7532.$$

Teil b) Die Zahlen aus Teil a) sind durch 4 teilbar und damit gerade. Andere gerade Zahlen kann man aus den Ziffern 2, 3, 5 und 7 nicht bilden. Für die Teilbarkeit durch 6 ist außerdem eine durch 3 teilbare Quersumme erforderlich.

Nur die Zahlen 72, 372 und 732 erfüllen diese Bedingung.

Teil c) Von den im Teil a) ermittelten Zahlen sind nur die folgenden auch durch 8 teilbar:

$$32, 72, 352, 752, 3752, 7352.$$

Teil d) Die Ziffern 2, 3, 5 und 7 haben zusammen die Summe 17 und können keine vierstellige, durch 3 teilbare Zahl ergeben.

Es gibt 4 Möglichkeiten, drei Ziffern aus den vier gegebenen Ziffern auszuwählen. In der Übersicht wurden jeweils die Quersummen gebildet und wenn diese durch 3 teilbar ist, auch die Lösungszahlen angegeben:

2, 3, 5 – Quersumme 10:	keine Lösungszahlen,
2, 3, 7 – Quersumme 12:	237, 273, 327, 372, 723, 732,
2, 5, 7 – Quersumme 14:	keine Lösungszahlen,
3, 5, 7 – Quersumme 15:	357, 375, 537, 573, 735, 753.

Es gibt sechs Möglichkeiten, zwei Ziffern aus den vier gegebenen Ziffern auszuwählen. In der folgenden Übersicht wurden jeweils die Quersummen gebildet und wenn diese durch 3 teilbar ist, auch die Lösungszahlen angegeben:

2, 3 – Quersumme 5:	keine Lösungszahlen,
2, 5 – Quersumme 7:	keine Lösungszahlen,
2, 7 – Quersumme 9:	27, 72,
3, 5 – Quersumme 8:	keine Lösungszahlen,
3, 7 – Quersumme 10:	keine Lösungszahlen,
5, 7 – Quersumme 12:	57, 75.

Schließlich gibt es noch die 3 selbst.

Zusammenfassend noch einmal alle Lösungszahlen:

$$3, 27, 57, 72, 75, 237, 273, 327, 357, 372, 375, 537, 573, 723, 732, 735, 753.$$

490622 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Eine vollständige Fallunterscheidung führt zur Lösung der Aufgabe:

Fall (I): Aussage (1) ist wahr und die anderen beiden sind falsch.

Wenn Aussage (1) wahr ist, ist der Hauptpreis im Umschlag 3 oder 4. Aussage (3) muss falsch sein, somit ist der Hauptpreis im Umschlag 4. Aussage (2) muss falsch sein und ist es dann auch. Der Hauptpreis kann im Umschlag 4 sein.

Fall (II): Aussage (2) ist wahr und die anderen beiden sind falsch.

Wenn Aussage (2) wahr ist, ist der Hauptpreis im Umschlag 2. Die Aussage (3) muss falsch sein, danach müsste der Hauptpreis im Umschlag 4 sein – und das ist ein Widerspruch.

Fall (III): Aussage (3) ist wahr und die anderen beiden sind falsch.

Wenn Aussage (3) wahr ist, ist der Hauptpreis nicht im Umschlag 4. Aussage (2) muss falsch sein, folglich ist er auch nicht im Umschlag 2. Aussage (1) muss auch falsch sein, und der Hauptpreis ist nicht in den Umschlägen 3 und 4. Also kann er nur noch im Umschlag 1 sein.

Barbara hat festgestellt, dass der Hauptpreis im Umschlag 1 oder im Umschlag 4 sein kann.

Teil b) Die Aussage (4) muss falsch sein, da die einzige wahre Aussage bereits unter den Aussagen (1) bis (3) gewesen sein muss. Da die Aussage (4) falsch ist, ist der Hauptpreis nicht in den Umschlägen 1 und 2. Damit muss der Hauptpreis nach dem Ergebnis der Teilaufgabe a) im Umschlag 4 sein. Die Aussage (1) ist wahr, die anderen sind falsch.

490624 Lösung *8 Punkte*

Teil a) Das Einzeichnen von zwei senkrecht aufeinander stehenden Symmetrieachsen ergibt mögliche Lösungen, siehe Abbildung L 490624 a1 für das Sechseck sowie L 490624 a2 und L 490624 a3 für das Achteck.

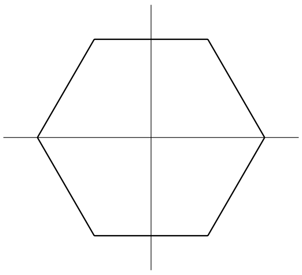

Abbildung L 490624 a1

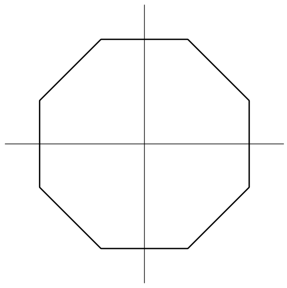

Abbildung L 490624 a2

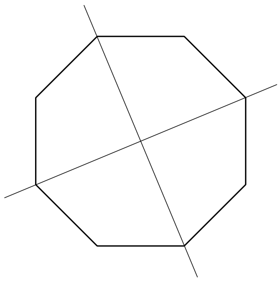

Abbildung L 490624 a3

Teil b) In Abbildung L 490624 b ist eine mögliche Lösung gezeigt.

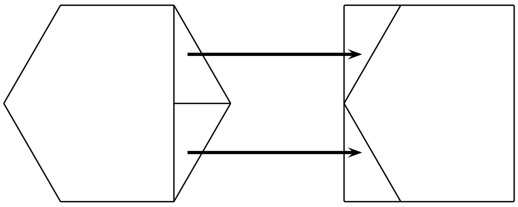

Abbildung L 490624 b

Teil c) Man kann das Sechseck in 12 gleich große Dreiecke einteilen, siehe Abbildung L 490624 c1. Die gesuchte graue Fläche enthält vier dieser Dreiecke und ist damit ein Drittel der Sechseckfläche.

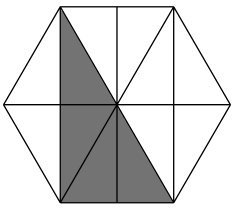

Abbildung L 490624 c1

Auch durch das Umlegen geeigneter Dreiecke kann eine Figur erhalten werden, in der jeweils drei gleich große Flächen entstehen, von denen eine die Größe der gesuchten Fläche hat, siehe Abbildungen L 490624 c2 und L 490624 c3.

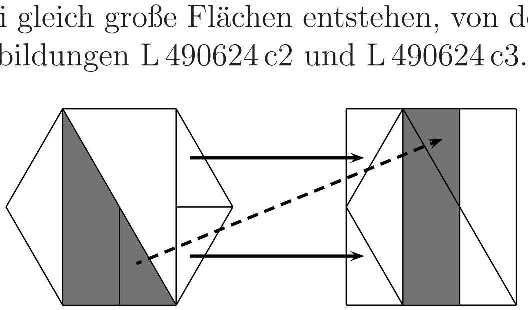

Abbildung L 490624 c2

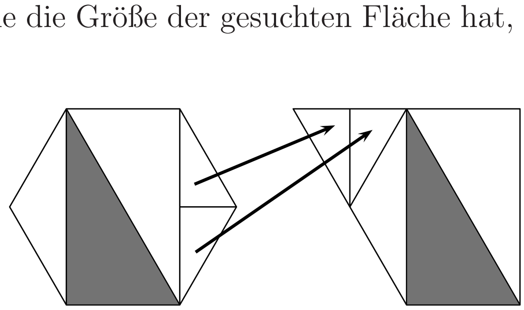

Abbildung L 490624 c3