49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11–13
Lösungen

491321 Lösung *10 Punkte*

Angenommen, es existiert ein Lösungspaar $(x; y)$. Dann ist Gleichung (1) äquivalent zu $x(x - y) = 2009$. Daher muss x ein Teiler von 2009 sein. Wegen $2009 = 7^2 \cdot 41$ ist $x \in \{1; 7; 41; 49; 287; 2009\}$. Aus x wird jetzt der Reihe nach $x - y$, dann y und schließlich $y^2 - x$ ausgerechnet.

In der folgenden Tabelle ist für $x \leq 41$ dann $x - y \geq 49$ und damit $y < 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. In den verbleibenden drei Fällen ist nur einmal $y^2 - x = 15$.

x	$x - y$	y	$y^2 - x$
1	2009	< 0	
7	287	< 0	
41	49	< 0	
49	41	8	15
287	7	280	78 113
2009	1	2008	4 030 055

Nach Konstruktion von x und y ist (1) in allen Zeilen erfüllt, (2) genau im vierten Fall. Es gibt also genau eine Lösung, nämlich $(49; 8)$.

Zweite Lösung: Setzt man $x = y^2 - 15$ aus Gleichung (2) in (1) ein, erhält man

$$y^4 - 30y^2 + 225 - y^3 + 15y = 2009,$$

also

$$y^4 - y^3 - 30y^2 + 15y - 1784 = 0.$$

Nach Probieren der Nullstelle $y = 8$ faktorisiert man

$$(y - 8)(y^3 + 7y^2 + 26y + 223) = 0.$$

Da der zweite Faktor für jedes positive y positiv wird, kann nur $y = 8$ und damit $x = 49$ Lösung sein, was die Probe $49^2 - 8 \cdot 49 = 2401 - 392 = 2009$ und $64 - 49 = 15$ bestätigt.

491322 Lösung *10 Punkte*

Nachdem das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt der Punkt C' auf dem kürzeren, den Punkt C nicht enthaltenden Bogen AB des Umkreises; Ähnliches lässt sich über die Lage von A' und B' sagen. Hieraus ergibt sich, dass die sechs Punkte A, C', B, A', C, B' in dieser Reihenfolge auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen, dass also das zu untersuchende Sechseck nicht überschlagen (und damit sogar konvex) ist (siehe auch Abbildung L 491322).

Nun sind in jedem der drei Vierecke $AC'A'C$, $CB'C'B$ und $BA'B'A$ die beiden Diagonalen jeweils Durchmesser des Umkreises. Aus dem Satz des Thales folgt damit sofort, dass jedes dieser Vierecke ein Rechteck ist. Wird jetzt das Dreieck $AC'B$ um $\overrightarrow{AC}$ verschoben, so wird der Punkt B in einen gewissen Punkt B'' abgebildet, Punkt A in C und Punkt C' in A'. Es gilt dabei $|B'C| = |C'B| = |A'B''|$ und $|AC| = |BB''|$. Zusätzlich zur Kongruenz der Dreiecke $CA'B''$ und $AC'B$ nach Konstruktion ist somit das Dreieck $CB'A$ kongruent zum Dreieck $B''A'B$. Damit sind das Viereck $ABB''C$ und das Sechseck $AC'BA'CB'$ flächengleich. Nach obigen Streckengleichheiten ist ferner das Dreieck ABC kongruent zum Dreieck $B''CB$ und folglich der Flächeninhalt des Vierecks $ABB''C$ doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Damit ist insgesamt gezeigt, dass sich die Flächeninhalte des Dreiecks ABC und des Sechsecks $AC'BA'CB'$ wie 1:2 verhalten.

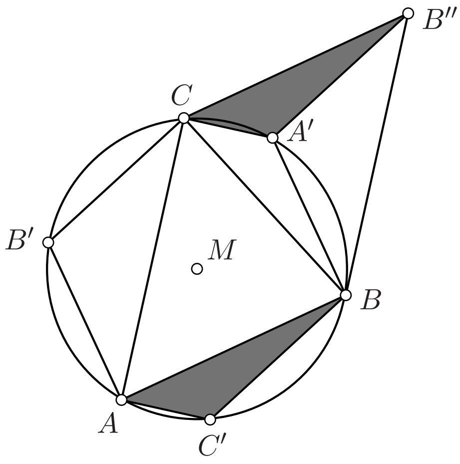

Abbildung L 491322

Zweite Lösung: Wie in der ersten Lösung wird gezeigt, dass das in der Aufgabenstellung betrachtete Sechseck konvex ist. Es sei nun H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Da dieses laut Voraussetzung spitzwinklig ist, liegt der Punkt H in seinem Inneren. Nach dem Satz des Thales steht die Gerade $A'B$ auf AB senkrecht, und nach Konstruktion von H gilt auch $CH \perp AB$. Beides zusammengenommen liefert $A'B \parallel CH$, und in gleicher Weise zeigt man $A'C \parallel BH$. Mithin ist das Viereck $A'CHB$ ein Parallelogramm, und insbesondere hat es einen doppelt so großen Flächeninhalt wie das Dreieck HBC. Aus demselben Grund haben die Vierecke $B'AHC$ und $C'BHA$ jeweils einen doppelt so großen Flächeninhalt wie die Dreiecke HCA bzw. HAB. Da sich aber das Sechseck $AC'BA'CB'$ aus den drei Vierecken $A'CHB$, $B'AHC$, $C'BHA$ und ebenso das Dreieck ABC aus den drei Dreiecken HBC, HCA, HAB zusammensetzt, erhalten wir hieraus unmittelbar, dass das in der Aufgabenstellung gesuchte Flächenverhältnis 1:2 beträgt.

Dritte Lösung: Wiederum wie in der ersten Lösung wird gezeigt, dass das in der Aufgabenstellung betrachtete Sechseck konvex ist. M bezeichne den Mittelpunkt des Umkreises. Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung spitzwinklig ist, liegt M im Inneren von Dreieck ABC, und es gilt $F(ABC) = F(MAB) + F(MBC) + F(MCA)$, wobei $F(ABC)$ den Flächeninhalt von Dreieck ABC bezeichnet usw.

Als Umkreismittelpunkt halbiert der Punkt M den Durchmesser $\overline{AA'}$; daher gilt $F(MBA') = \frac{1}{2}F(ABA') = F(MAB)$, entsprechend $F(MB'A) = F(MAB)$ sowie analoge Aussagen für $F(MBC)$ und $F(MCA)$.

Weil M auch im Inneren des Sechsecks $AC'BA'CB'$ liegt (und dieses nicht überschlagen ist), ist $F(AC'BA'CB') = F(MAC') + F(MC'B) + F(MBA') + F(MA'C) + F(MCB') + F(MB'A) = 2 \cdot (F(MAB) + F(MBC) + F(MCA))$ und damit $F(AC'BA'CB') = 2 \cdot F(ABC)$.

Bemerkung: Der bewiesene Sachverhalt bleibt auch dann richtig, wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Allerdings ist dann zu beachten, dass das Sechseck $AC'BA'CB'$ in diesem Fall zu einem Viereck „ausgeartet“ ist, da zwei Paare von jeweils benachbarten Eckpunkten zusammenfallen. – Ist das Dreieck ABC hingegen stumpfwinklig, sagen wir bei C, so ist das Sechseck $AC'BA'CB'$ überschlagen, und es gibt einen Schnittpunkt R der Seiten $\overline{AC'}$ und $\overline{B'C}$ sowie einen Schnittpunkt S der Seiten $\overline{A'C}$ und $\overline{BC'}$. In diesem Fall ergibt sich die Formel $F(CRC'S) - F(AB'R) - F(A'BS) = 2F(ABC)$ als Analogon der oben gezeigten Aussage.

491323 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Für die Quadrate der positiven Zahlen x_n und y_n gilt

$$x_n^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}\ , \qquad y_n^2 = 4n + 2.$$

Aus der für alle positiven Zahlen n gültigen Abschätzung

$$0 < 4n(n+1) = 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

erhält man durch Wurzelziehen die Ungleichung

$$2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1.$$

Folglich ist

$$4n + 1 = 2n + 1 + 2n < 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} = x_n^2 < 2n + 1 + 2n + 1 = y_n^2. \qquad (1)$$

Weil x_n und y_n positiv sind, folgt hieraus auch $x_n < y_n$.

Teil b) Wir nehmen nun an, dass zwischen x_n und y_n eine ganze Zahl m liegt, also dass $x_n < m < y_n$ gilt. Mit (1) folgt dann $4n+1 < m^2 < 4n+2$. Dies ist unmöglich, da m^2 ebenfalls eine ganze Zahl sein muss.

Weiterhin liegt x_n^2 nach (1) ebenfalls zwischen $4n + 1$ und $4n + 2$. Damit kann x_n^2 und somit auch x_n nicht ganzzahlig sein.

Schließlich ist $y_n^2 = 4n + 2$ keine Quadratzahl, denn jede Quadratzahl lässt bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1. Damit kann auch y_n keine ganze Zahl sein, woraus die Behauptung folgt.

491324 Lösung *10 Punkte*

Sind je zwei zelophanische Städte durch eine Straße verbunden, so können vier Städte beliebig gewählt werden, die dann in der gewünschten Weise miteinander verbunden sind. Wir müssen also nur noch den Fall behandeln, dass es zwei Städte gibt, sagen wir A und C, die nicht durch eine Straße verbunden sind.

Da A nicht mit C verbunden ist, muss es mit (mindestens) drei anderen Städten direkt verbunden sein, die wir mit B, D und E bezeichnen. Die sechste Stadt sei F.

In gleicher Weise muss auch C mit (mindestens) drei von A verschiedenen Städten verbunden sein. Weil dafür nur die Städte B, D, E und F in Betracht kommen, muss C also mit (wenigstens) zwei der Städte B, D, E direkt verbunden sein. Wenn wir gegebenenfalls die Bezeichnungen so ändern, dass dies B und D sind, so sind B und D sowohl mit A als auch mit C verbunden, so dass die gewünschte Rundfahrt möglich ist.