49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Lösungen

491021 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Aus Gleichung (1) folgt $(2y+x)(2y-x) = 2y+x$ und daraus $(2y+x)(2y-x-1) = 0$. Dies ist genau für $x = -2y$ oder $x = 2y - 1$ erfüllt.

Einsetzen in Gleichung (2) liefert $y = \frac{4}{5}$ oder $y = 3$ und dazu $x = -\frac{8}{5}$ bzw. $x = 5$. Damit ergibt sich als Menge möglicher Lösungen $L = \left\{\left(-\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right), (5; 3)\right\}$.

Einsetzen der Werte in die Ausgangsgleichungen bestätigt, dass jedes der beiden Paare auch wirklich eine Lösung ist.

Teil b) Die Gleichung (1) kann man umformen zu $(ay + bx) \cdot (ay - bx - a) = 0$. Es ergeben sich zwei Fälle.

Fall 1: $ay + bx = 0$, also $ay = -bx$.

Einsetzen in (2) ergibt $2bx = -a$, und damit $x = -\frac{a}{2b}$ wegen $b > 0$.

Durch Einsetzen in (2) erhält man $a \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$.

Ist $a = 0$, so kann y frei gewählt werden. Die Probe (für $a = 0$) zeigt, dass $(0; y)$, wobei y frei wählbar ist, Lösung des Systems ist.

Ist $a \neq 0$, so erhält man $y = \frac{1}{2}$ als notwendige Bedingung.

Das Einsetzen von $x = -\frac{a}{2b}$ und $y = \frac{1}{2}$ in die Gleichungen (1) und (2) zeigt, dass $\left(-\frac{a}{2b}; \frac{1}{2}\right)$ tatsächlich Lösung ist.

Fall 2: $ay - bx - a = 0$, also $ay = bx + a$.

Einsetzen in Gleichung (2) liefert $x = -\frac{a}{2b}$ wegen $b > 0$.

Analog zum 1. Fall erhält man die Lösungen $(0; y)$ mit frei wählbarem y für $a = 0$ sowie $\left(-\frac{a}{2b}; \frac{1}{2}\right)$ für $a \neq 0$, was jeweils schon durch die Probe bestätigt wurde.

Hinweis: Einsetzen von $ay = -a - 3bx$ aus (2) in (1) liefert nach Umformungen $(2bx + a)^2 = 0$ und man erhält alle Lösungen z. B. durch Einsetzen von $x = -\frac{a}{2b}$ in (2).

Noch elementarer, aber rechenaufwendiger, kann man in beiden Teilaufgaben vorgehen, indem man die Gleichung (2) z. B. nach x auflöst und die nach Einsetzen in (1) gefundene quadratische Gleichung in y löst.

491022 Lösung *10 Punkte*

Aussage (A2) kann nicht wahr sein (23 ist Primzahl), also ist (A1) wahr. Die gesuchte Zahl ist daher dreistellig.

Aussage (B2) kann nicht wahr sein, weil 111 und alle Vielfache davon durch 37 teilbar sind. Man beachte dazu, dass $111 = 3 \cdot 37$ gilt und weiterhin, dass alle dreistelligen Zahlen mit drei gleichen Ziffern Vielfache von 111 sind. Barbara hätte in diesem Fall gleich zwei wahre Aussagen gemacht. Also ist (B1) wahr und (B2) falsch.

Ist nun zusätzlich (C1) wahr, dann muss die Zahl sogar durch $11 \cdot 37 = 407$ teilbar sein.

Ist (C2) wahr, dann muss die Zahl durch 370 teilbar sein.

Es kommen also nur noch die Zahlen 370, 407, 740 und 814 in Frage. Davon kann die Zahl 407 keine Lösung sein, denn dann hätte Danny zwei wahre Aussagen gemacht.

Die übrigen drei Zahlen erfüllen alle gestellten Bedingungen, können also auf dem Zettel stehen:

- Für 370 sind genau (A1), (B1), (C2) und (D2) wahr.
- Für 740 sind genau (A1), (B1), (C2) und (D1) wahr.
- Für 814 sind genau (A1), (B1), (C1) und (D1) wahr.

491023 Lösung *10 Punkte*

Teil a) Die Strecke $\overline{AC}$ ist Symmetrieachse des Drachenvierecks. Damit sind die beiden Teilwinkel $\sphericalangle CAD$ und $\sphericalangle BAC$ kongruent, und es gilt $|\sphericalangle BAD| = 2\,|\sphericalangle CAD|$. Nach dem Zentriwinkel-Peripheriewinkelsatz gilt auch die Gleichheit $|\sphericalangle CMD| = 2\,|\sphericalangle CAD|$. Daraus folgt die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CMD$.

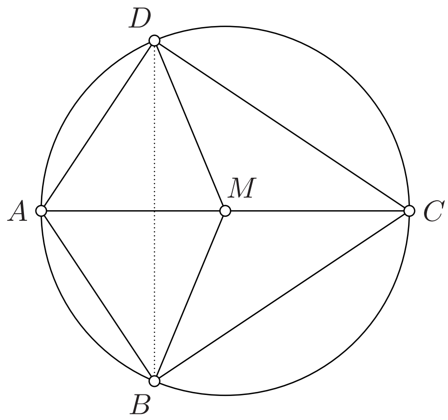

Abbildung L 491023 a

Lösungsvariante zu Teil a) Da das Viereck $ABCD$ nach dem Satz des Thales zwei rechte Innenwinkel mit der Summe 180° besitzt und da AC die Symmetrieachse ist, gilt für die anderen beiden Winkel

$$|\sphericalangle BAD| = 180° - |\sphericalangle DCB| = 180° - 2\,|\sphericalangle DCM|.$$

Im gleichschenkligen Dreieck DCM ($\overline{CM}$ und $\overline{DM}$ sind Umkreisradien) gilt

$$|\sphericalangle CMD| = 180° - (|\sphericalangle DCM| + |\sphericalangle MDC|) = 180° - 2\,|\sphericalangle DCM|.$$

Also sind $\sphericalangle CMD$ und $\sphericalangle BAD$ gleich groß.

Teil b) Die Diagonale $\overline{AC}$ ist der Umkreisdurchmesser (mit der Länge $2r$). Damit ist das Dreieck ACD nach dem Satz des Thales rechtwinklig. Also gilt $a^2 + b^2 = (2r)^2$.

Für den Umkreisradius gilt daher

$$r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}.$$

Teil c) Unter den beschriebenen Bedingungen gilt für den Berührungsradius $\overline{MB} \perp t$ und damit wegen der Parallelität von t und AC auch $\overline{MB} \perp \overline{AC}$. Die Strecke $\overline{MB}$ ist somit Höhe auf $\overline{AC}$ im Dreieck ABC sowie auf $\overline{CE}$ des Dreiecks CBE.

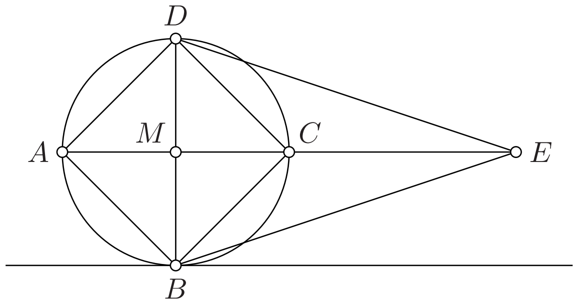

Abbildung L 491023 c

Wenn sich die Vierecksfläche verdoppelt hat, muss die Länge der Diagonale $\overline{AE}$ im Vergleich zu $|AC|$ doppelt so groß sein. Also gilt auch $|CE| = |AC| = 2r$. Aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das rechtwinklige Dreieck EMB, folgt $|BE|^2 = r^2 + (r + 2r)^2$.

Damit gilt $|BE| = r \cdot \sqrt{10}$.

<u>491324 Lösung</u> *10 Punkte*

Sind je zwei zelophanische Städte durch eine Straße verbunden, so können vier Städte beliebig gewählt werden, die dann in der gewünschten Weise miteinander verbunden sind. Wir müssen also nur noch den Fall behandeln, dass es zwei Städte gibt, sagen wir A und C, die nicht durch eine Straße verbunden sind.

Da A nicht mit C verbunden ist, muss es mit (mindestens) drei anderen Städten direkt verbunden sein, die wir mit B, D und E bezeichnen. Die sechste Stadt sei F.

In gleicher Weise muss auch C mit (mindestens) drei von A verschiedenen Städten verbunden sein. Weil dafür nur die Städte B, D, E und F in Betracht kommen, muss C also mit (wenigstens) zwei der Städte B, D, E direkt verbunden sein. Wenn wir gegebenenfalls die Bezeichnungen so ändern, dass dies B und D sind, so sind B und D sowohl mit A als auch mit C verbunden, so dass die gewünschte Rundfahrt möglich ist.