

## Altersgruppe Klasse 10 und Einführungsphase

**Hinweis:** Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist.

Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatikalisch einwandfreien Sätzen dar.

### Aufgabe 1

Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke mit den folgenden Eigenschaften.

- (1) Beide Katheten sind länger als 2.  
 (2) Verkürzt man beide Katheten um jeweils 2, so vermindert sich der Flächeninhalt um 10.

Die Längen und Flächeninhalte sind dabei in Maßzahlen bzgl. einer geeignet gewählten Längeneinheit und der zugehörigen Flächeninhaltseinheit angegeben.

- a) Gibt es unter diesen Dreiecken eines, bei dem die Länge einer der beiden Katheten 4 beträgt?  
 b) Bestimmen Sie alle Werte, die die Summe der Kathetenlängen unter den genannten Bedingungen annehmen kann.  
 c) Welche der betrachteten Dreiecke haben zusätzlich die folgende dritte Eigenschaft?  
 (3) Verlängert man beide Katheten um jeweils 2, so vergrößert sich der Flächeninhalt um 14.

### Aufgabe 2

Hans würfelt mit vier idealen sechsseitigen Spielwürfeln.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der vier gewürfelten Zahlen eine Primzahl ist.  
 b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Produkt der vier gewürfelten Zahlen kleiner als 11 ist.

### Aufgabe 3

Die Zahlenfolge  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sei definiert durch  $a_1 = 0$  und  $a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 4}$  für  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

- a) Berechnen Sie die neun Folgenglieder  $a_1, a_2, \dots, a_9$ .  
 b) Versuchen Sie aus den Resultaten des Aufgabenteils a) eine möglichst einfache, explizite Formel für  $a_n$  abzuleiten. Formulieren Sie Ihr Resultat als eine Vermutung. Welcher Wert ist für die Zahl  $a_{2018}$  zu vermuten?  
 c) Zeigen Sie, dass Ihre Formel für  $a_n$  tatsächlich den beiden Bedingungen  
 $a_1 = 0$  und  $a_{n+1} = a_n + 1 + \sqrt{4a_n + 4}$  genügt.

**Hinweis:** Die Zahlenfolge 3, 5, 9, 17, . . . bzw.  $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 17, \dots$  wird mit dem Bildungsgesetz

$$a_1 = 3 \text{ und } a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

berechnet, also  $a_2 = 2 \cdot a_1 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5, a_3 = 2 \cdot a_2 - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$  usw. Man erhält dieselbe Zahlenfolge mit Hilfe der expliziten Vorschrift  $a_n = 2^n + 1$  für  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

✂.....

### Erklärung

**Ich erkläre hiermit, dass ich die Aufgaben ohne fremde Hilfe gelöst habe.**

**Name, Anschrift und Schule bitte in Druckschrift)**

**VORNAME:** ..... **NAME:** .....

**STRASSE:** ..... **PLZ:** ..... **DORTMUND**

**TELEFON:** .....

**SCHULE:** ..... **KLASSE:** .....

**DATUM:** ..... **UNTERSCHRIFT:** .....

Schicke Deine Lösungen mit der ausgefüllten, abgetrennten Erklärung (siehe oben) bis zum 04.10.2018 (Poststempel) an das:  
**Immanuel-Kant-Gymnasium, Stichwort: „Mathematik-Wettbewerb“, Grüningsweg 42 – 44, 44319 Dortmund**