15. Dortmunder Mathematikwettbewerb
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 12–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 1 (471321)

Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x^2 + 4y = 21 \qquad (1)$$
$$y^2 + 4x = 21 \qquad (2)$$

erfüllen.

Aufgabe 2 (471322)

Das Dreieck ABC sei gleichschenklig mit den Schenkeln $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Der Ankreis k des Dreiecks ABC berühre die Seite $\overline{BC}$ und die Geraden AC und AB wie in der Abbildung A 471322 gezeigt.

Man beweise, dass der Radius des Kreises k mit der Länge der Höhe auf der Basis des Dreiecks ABC übereinstimmt.

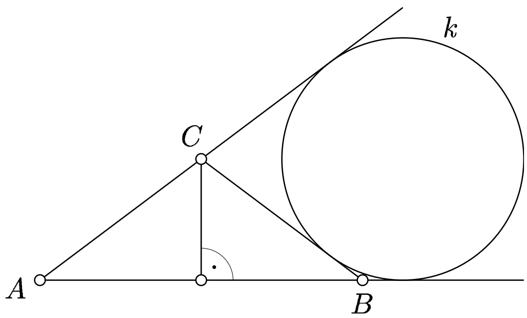

Abbildung A 471322

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Aufgabe 3 (471022)

Gegeben ist eine positive reelle Zahl a. Es wird eine Folge von Zahlen x_2, x_3, ... aus dem Startwert $x_1 = 0$ schrittweise nach der Vorschrift $x_{n+1} = \sqrt{a^2 + a + x_n}$ für $n \geq 1$ berechnet.

Weisen Sie nach,

a) dass jedes Folgenglied echt größer als das vorhergehende ist, also $x_n < x_{n+1}$ für $n \geq 1$ gilt, und

b) dass alle diese Werte x_n kleiner als $a + 1$ sind.

Aufgabe 4 (471324)

Brüche der Form $\frac{1}{n}$, bei denen im Zähler eine 1 steht und im Nenner eine natürliche Zahl n mit $n > 1$, heißen Stammbrüche. Stammbrüche lassen sich häufig als Summe zweier anderer Stammbrüche schreiben. Z. B. ist $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

a) Beweise, dass sich jeder Stammbruch $\frac{1}{n}$ auf zwei verschiedene Weisen als Summe zweier Stammbrüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ schreiben lässt.

b) Beweise: Ist n keine Primzahl, dann lässt sich $\frac{1}{n}$ auf mindestens 3 verschiedene Weisen als Summe zweier Stammbrüche darstellen.

c) Wenn n eine Primzahl ist, gibt es nicht mehr als zwei verschiedene Darstellungen von $\frac{1}{n}$ als Summe zweier Stammbrüche.