15. Dortmunder Mathematikwettbewerb
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10–11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 1 (470921)

a) Man beweise: Eine 10-stellige natürliche Zahl, die jede Ziffer genau einmal enthält, kann keine Primzahl sein.

b) Im Folgenden betrachten wir eine Primzahl p mit $p > 3$ und eine natürliche Zahl n mit $n \geq 1$.
Man beweise: Wenn die Dezimaldarstellung von p^n genau hundert Stellen besitzt, dann kommt in dieser dezimalen Darstellung von p^n eine Ziffer mehr als zehnmal vor.

Aufgabe 2 (470922)

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C und $|BC| \leq |AC|$. Über der Kathete $\overline{BC}$ sei nach außen ein Quadrat mit dem Diagonalenschnittpunkt M angetragen. Es sei V der Schnittpunkt von AB mit dem Lot von M auf BC, Q der Fußpunkt des Lots aus M auf die Gerade AB und R der Fußpunkt des Lots aus V auf die Gerade AC.

a) Zeichnen Sie eine Beispielskizze mit $|AC| = 7\,\text{cm}$ und $|BC| = 3\,\text{cm}$.

b) Beweisen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt F_1 des Dreiecks AVR kleiner ist als der Flächeninhalt F_2 des Dreiecks VQM.

c) Bestimmen Sie alle Verhältnisse der Kathetenlängen $v = |AC| : |BC|$, für welche $2\,F_1 = F_2$ gilt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Aufgabe 3 (470923)

Max fährt immer mit der U-Bahn zur Schule. Er muss dazu an der Station „Schillerstraße“ aussteigen. Vom Bahngleis führen eine Treppe und eine Rolltreppe nach oben, Max hat jedoch die Angewohnheit, ausschließlich die Rolltreppe zu benutzen.

Max geht immer mit derselben Geschwindigkeit und hat festgestellt, dass er morgens auf dem Weg zur Schule, wenn er die Rolltreppe hinaufgeht, stets 15 Stufen zählt, und nachmittags auf dem Weg nach Hause, wenn er die Rolltreppe gegen die Fahrtrichtung hinabsteigt, 35 Stufen nehmen muss.

Diese Woche ist die Rolltreppe kaputt. Wie viele Stufen wird Max jetzt zählen, wenn er die Rolltreppe benutzt?

Hinweis: Der Effekt, dass die Treppenstufen am Anfang und am Ende der Rolltreppe ihre Höhe ändern und verschwinden, ist zu vernachlässigen.

Aufgabe 4 (470924)

Es wird eine Folge von n positiven rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ betrachtet, für die gilt:

$$x_2^2 = 1 + x_1, \quad x_3^2 = 1 + x_2, \quad x_4^2 = 1 + x_3, \quad \ldots, \quad x_n^2 = 1 + x_{n-1}.$$

Kurz: Es gilt $x_{k+1}^2 = 1 + x_k$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

a) Bestimmen Sie für $n = 3$ und $x_1 = \frac{200}{2401}$ die Werte für x_2 und x_3. Geben Sie die Werte der rationalen Zahlen x_2 und x_3 exakt in ihrer Bruchdarstellung an.

b) Geben Sie ein weiteres Beispiel $x_1, \ldots, x_5$ an, welches den obigen Bedingungen genügt und wo $x_1, \ldots, x_5$ sämtlich ganze Zahlen größer als 1 sind.

c) Beweisen Sie für jede Folge von n positiven rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche den obigen Bedingungen genügt, folgende Aussage: Wenn $x_1 < 2$ gilt, dann gilt $x_n < 2$.