14. Dortmunder Mathematikwettbewerb

Aufgaben der 2. Runde Klasse 12 & 13

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen. Die Lösungen werden am kommenden Mittwoch, den 22.11.2006 im Internet veröffentlicht unter der Adresse www.dortmunder-mathematikwettbewerb.de.*

Nr. 1 (461321)

Für jede ganze Zahl k mit $k \geq 2$ untersuche man, ob die Summe von k aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen eine Primzahl sein kann.

Nr. 2 (461322)

Im Jahr 2009 wird die Internationale Mathematik-Olympiade in Deutschland stattfinden. Ein Vorschlag für das Logo zeigt ein Sechseck $ABCDEF$, bei dem die gegenüberliegenden Seiten paarweise parallel sind. Außerdem ist die Diagonale $\overline{AD}$ parallel zu $\overline{BC}$ und die Diagonale $\overline{BE}$ parallel zu $\overline{CD}$, der Schnitttpunkt der Diagonalen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ sei O (vgl. Abbildung A Nr. 2 (461322)).

Man zeige, dass die Flächeninhalte der Parallelogramme $FAOE$ und $CDOB$ (in der Abbildung A Nr. 2 (461322) grau) gleich groß sind.

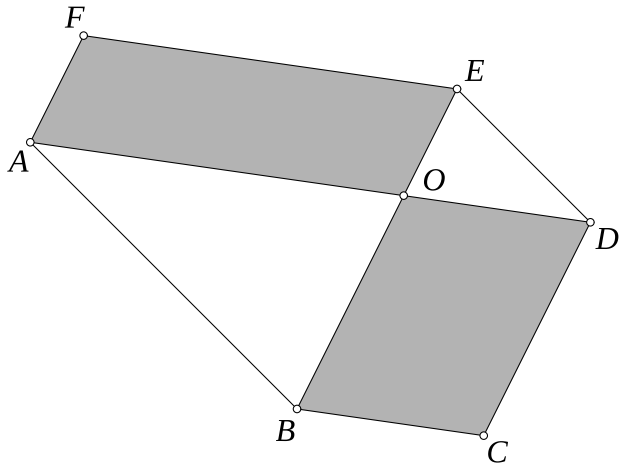

Abbildung A Nr. 2 (461322)

Nr. 3 (461323)

Man ermittle alle von null verschiedenen ganzen Zahlen a, für die die Gleichung

$$a^3 \cdot x^3 + a^2 \cdot x^2 + a \cdot x + a = 0 \tag{1}$$

ganzzahlige Lösungen x besitzt, und gebe diese Lösungen an.

Nr. 4 (461024)

Bestimmen Sie alle Folgen $F = (n_0, n_1, \ldots, n_7)$ von acht ganzen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Für $i = 0, \ldots, 7$ gibt die Zahl n_i die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl i in der Folge $(n_0, n_1, \ldots, n_7)$ an (so gibt beispielsweise n_3 an, wie viele der Zahlen aus der Folge $(n_0, n_1, \ldots, n_7)$ gleich 3 sind).