14. Dortmunder Mathematikwettbewerb

Aufgaben der 2. Runde Klasse 10 & 11

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen. Die Lösungen werden am kommenden Mittwoch, den 22.11.2006 im Internet veröffentlicht unter der Adresse www.dortmunder-mathematikwettbewerb.de.*

Nr. 1 (461321)

Für jede ganze Zahl k mit $k \geq 2$ untersuche man, ob die Summe von k aufeinander folgenden positiven ganzen Zahlen eine Primzahl sein kann.

Nr. 2 (461021)

Die Läuferinnen Karla, Lili und Momo sind bekannt dafür, dass sie als Schlussläuferinnen ihrer (3×1000 m)-Staffeln mit der Gleichmäßigkeit eines Uhrwerks ihre Runden drehen. Beim letzten Staffelrennen gewann Momo auf jeweils 50 m ihrer Laufstrecke 5 m gegen Lili und hatte im Ziel 20 m Vorsprung vor dieser. Karla holte auf jeweils 200 m ihrer Laufstrecke 15 m zu Lili auf, doch rettete diese einen knappen Vorsprung von 1 m vor Karla ins Ziel.

Welche Läuferin ging als letzte auf ihre 1000-m-Strecke und wie groß waren zu diesem Zeitpunkt ihre Rückstände auf die beiden Konkurrentinnen?

Nr. 3 (461023)

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Fußpunkt der von C ausgehenden Höhe sei H. Die Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACH$ schneide die Seite $\overline{AB}$ in P, die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle HCB$ schneide die Seite $\overline{AB}$ in Q.

a) Zeige, dass dann die Winkelhalbierende des Winkels α auf $\overline{CQ}$ senkrecht steht und dass die Winkelhalbierende Winkels β auf $\overline{CP}$!

b) Zeige, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PQC der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist!

Nr. 4 (461024)

Bestimmen Sie alle Folgen $F = (n_0, n_1, \ldots, n_7)$ von acht ganzen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Für $i = 0, \ldots, 7$ gibt die Zahl n_i die Häufigkeit des Vorkommens der Zahl i in der Folge $(n_0, n_1, \ldots, n_7)$ an (so gibt beispielsweise n_3 an, wie viele der Zahlen aus der Folge $(n_0, n_1, \ldots, n_7)$ gleich 3 sind).