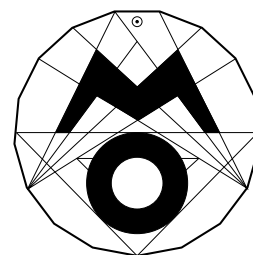


13. Dortmunder Mathematikwettbewerb



Aufgaben der 2. Runde Klasse 11

Hinweis: Erläutern Sie Ihre Lösungsansätze und -wege mit knappen Sätzen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen. Die Lösungen werden am kommenden Mittwoch, den 16.11.2005 im Internet veröffentlicht unter der Adresse www.dortmunder-mathematikwettbewerb.de.

Aufgabe 1 (451022)

Für welche Paare $(a; b)$ reeller Zahlen gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{a}\right)} \leq \frac{1}{4}?$$

Aufgabe 2 (451024)

In der Mitte des regelmäßigen Achtecks $\overline{A_1A_2} \dots \overline{A_8}$ mit der Seitenlänge a und dem Flächeninhalt A schneiden die acht Diagonalen $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_2A_4}$, \dots , $\overline{A_6A_8}$, $\overline{A_7A_1}$ und $\overline{A_8A_2}$ ein kleineres Achteck $B_1B_2 \dots B_8$ mit der Seitenlänge b und dem Flächeninhalt B aus. Dabei bleibt ein eckiger Ring mit dem Flächeninhalt C übrig.

Beweisen Sie: $B = C\sqrt{2}$.

Aufgabe 3 (451021)

Es sitzen 25 Jungen und 25 Mädchen an einem runden Tisch. Zeigen Sie, dass es einen Jungen oder ein Mädchen gibt, dessen direkte Nachbarn beide Mädchen sind.

Aufgabe 4 (451321)

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x , die die Gleichung

$$\frac{|x^2 - 1|}{x - 2} = x$$

erfüllen.