49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 1

490921

a) Ermitteln Sie alle ganzen Zahlen r, für die $\frac{50}{20-|r|}$ eine natürliche Zahl ist.

b) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl a, für die gilt:
Es gibt genau 11 ganze Zahlen s, für die $\frac{a}{75-|s|}$ eine natürliche Zahl ist.

Hinweis: Der Betrag einer ganzen Zahl ist sehr einfach zu bestimmen. Zum Beispiel gilt: $|+8| = +8$, $|-8| = +8$, $|+7| = +7$, $|-7| = +7$, $|0| = 0$.

Aufgabe 2

490923

Gegeben sind zwei kleine Fässer F_1 und F_2 mit einem Fassungsvermögen von jeweils 10 Litern. In dem Fass F_1 befinden sich 4 Liter der Flüssigkeit A. Im Fass F_2 sind 2 Liter der Flüssigkeit B. Die beiden Flüssigkeiten A und B besitzen die gleiche Dichte und sind miteinander mischbar. Zum Umfüllen steht eine 1-Liter-Kelle zur Verfügung.

Zuerst wird eine volle Kelle von F_1 nach F_2 umgefüllt. Nach dem Umrühren in F_2 wird eine volle Kelle des entstandenen Gemischs nach F_1 zurückgefüllt. Dort wird erneut umgerührt; anschließend wird wieder eine volle Kelle von F_1 nach F_2 umgefüllt.

a) Berechnen Sie den Anteil der Flüssigkeit A am Inhalt des Fasses F_1 nach dem letzten Umfüllen als ganzzahliges Verhältnis.

b) Berechnen Sie den Anteil der Flüssigkeit B am Inhalt des Fasses F_2 nach dem letzten Umfüllen als ganzzahliges Verhältnis.

Hinweis: Ein ganzzahliges Verhältnis ist ein vollständig gekürzter Bruch.

Aufgabe 3

490924

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a und b, dem Inkreisradius r und dem Umkreisradius R.

a) Es wird zunächst der Spezialfall betrachtet, dass das Dreieck ABC gleichschenklig-rechtwinklig ist.
Beweisen Sie, dass dann die Summe $R + r$ gleich der Kathetenlänge a ist.

b) Nun sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck.
Beweisen Sie, dass die Summe $R + r$ gleich dem arithmetischen Mittel der Kathetenlängen, also gleich $\frac{a+b}{2}$, ist.