49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 1

491321

Man bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 - xy = 2009 \tag{1}$$
$$y^2 - x = 15. \tag{2}$$

Aufgabe 2

491322

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Die Spiegelpunkte der Eckpunkte A, B, C am Mittelpunkt des Umkreises von Dreieck ABC seien A', B' bzw. C'. Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Dreiecks ABC und des Sechsecks $AC'BA'CB'$.

Aufgabe 3

491323

Für jede positive ganze Zahl n sei

$$x_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}\,, \qquad y_n = \sqrt{4n+2}\,.$$

a) Man beweise, dass stets $x_n < y_n$ gilt.

b) Man beweise, dass x_n und y_n nicht ganzzahlig sind und dass auch zwischen x_n und y_n keine ganze Zahl liegt.

Aufgabe 4

491324

Auf der Insel Zelophanien gibt es genau sechs Städte. Jede derselben ist mit mindestens drei anderen direkt durch in beide Richtungen befahrbare Schnellstraßen verbunden. Man beweise, dass es vier Städte A, B, C und D derart gibt, dass man direkt von A nach B, von B nach C, von C nach D und wieder von D nach A fahren kann.