49. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 1

491021

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$4y^2 - x^2 = 2y + x \qquad (1)$$
$$3y - x = 4 \qquad (2)$$

b) Wir denken uns eine reelle Zahl a und eine positive reelle Zahl b als gewählt. Bestimmen Sie alle Lösungen $(x; y)$ des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit von a und b.

$$a^2 \cdot y^2 - b^2 \cdot x^2 = a^2 \cdot y + a \cdot b \cdot x \qquad (1)$$
$$a \cdot y + 3 \cdot b \cdot x = -a \qquad (2)$$

Aufgabe 2

491022

Alf, Barbara, Clara und Danny haben sich gemeinsam eine natürliche Zahl ausgedacht und diese auf einen Zettel geschrieben. Die Klasse soll die Zahl erraten. Dazu macht jede der vier Personen zwei Aussagen über die Zahl. Hier sind die vier Aussagenpaare:

(A1) Die Zahl ist dreistellig.
(A2) Das Produkt aller Ziffern der Zahl beträgt 23.

(B1) Die Zahl ist durch 37 teilbar.
(B2) Die Zahl besteht aus drei gleichen Ziffern.

(C1) Die Zahl ist durch 11 teilbar.
(C2) Die Zahl endet mit einer Null.

(D1) Die Quersumme der Zahl ist größer als 10.
(D2) Die Ziffer an der Hunderterstelle ist weder die kleinste noch die größte der drei Ziffern.

Am Ende verraten A, B, C und D noch, dass von ihren beiden Aussagen jeweils genau eine wahr und genau eine falsch war.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben alle Möglichkeiten für die unbekannte Zahl auf dem Zettel.

Aufgabe 3

<u>491023</u>

In einem Drachenviereck $ABCD$ haben die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ die Länge a und die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ die Länge b. Das Drachenviereck besitze einen Umkreis k (d. h. alle Eckpunkte A, B, C und D liegen auf diesem Kreis k) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.

a) Beweisen Sie, dass die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CMD$ gleich groß sind.

b) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Umkreisradius aus den Längen a und b her.

c) Es wird ein spezielles Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse $\overline{AC}$ und dem Umkreis k betrachtet. Der Punkt B soll so auf dem Umkreis k liegen, dass eine Parallele zu AC durch diesen Punkt B die Tangente t in B an den Umkreis k ist. Ein Punkt E liege auf der Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus so, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABED$ doppelt so groß ist wie der Inhalt des Vierecks $ABCD$.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BE}$ in Abhängigkeit von r.

Aufgabe 4

<u>491324</u>

Auf der Insel Zelophanien gibt es genau sechs Städte. Jede derselben ist mit mindestens drei anderen direkt durch in beide Richtungen befahrbare Schnellstraßen verbunden. Man beweise, dass es vier Städte A, B, C und D derart gibt, dass man direkt von A nach B, von B nach C, von C nach D und wieder von D nach A fahren kann.